$\boxed{1}$ $a_1 = 1$, $a_2 = p^2$, $a_3 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$

$p = 1$のとき $a_3 = 13$

$p = 2$のとき $a_3 = 16$, $a_4 = 25$, $a_5 = 22$

$p = 3$のとき $a_3 = 21$

$p = 4$のとき $a_3 = 28$

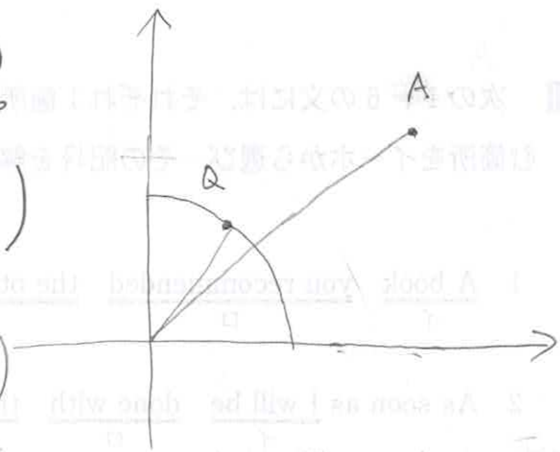
$p = 5$のとき $a_3 = 37$

$(p+1)^2 = p^2 + (2p+1)$

$p = 6$のとき $2p+1 > 12$ $(p+1)^2 > p^2 + 12 > p^2$

$\boxed{2}$

点P(x, y), 点Q$(\cos\theta, \sin\theta)$ とする。



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(\cos\theta + \sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\cos 2\theta + \sin 2\theta \\ \sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$x + y = 2\sin 2\theta + 2$ $\qquad$ $x - y = 2\cos 2\theta$

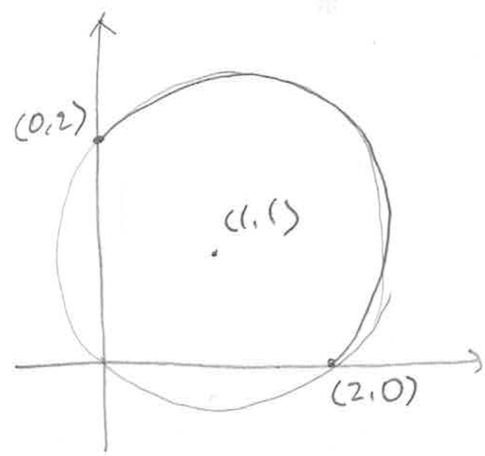
$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ より

$$\left(\frac{x+y-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$

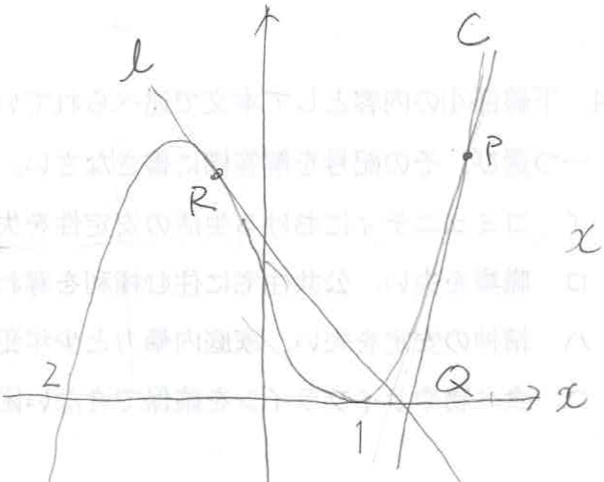


3

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3$

点αにおける接線

$$y - (\alpha^3 - 3\alpha + 2) = 3(\alpha^2 - 1)(x - \alpha)$$



$y = 0$のとき、

$$x = \alpha - \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 2}{3(\alpha^2 - 1)} = \alpha - \frac{\alpha^2 + \alpha - 2}{3(\alpha + 1)} = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}$$

lの接点を$R(t, f(t))$とすると、x軸との交点のx座標は $\frac{2}{3}\,\frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \qquad (\alpha + 1)t^2 - \alpha^2 t - \alpha^2 = 0$$

$$(t - \alpha)\{(\alpha + 1)t + \alpha\} = 0 \qquad t = \alpha,\ -\frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

$\therefore$ lとCの接点のx座標は $-\frac{\alpha}{\alpha + 1}$

(2) $\alpha = 2$のとき 点Rの座標は $\left(-\frac{2}{3}, \frac{46}{27}\right)$

lの式は $y - \frac{46}{27} = 3 \cdot \frac{-5}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right)$ $\qquad y = -\frac{5}{3}x + \frac{70}{27}$

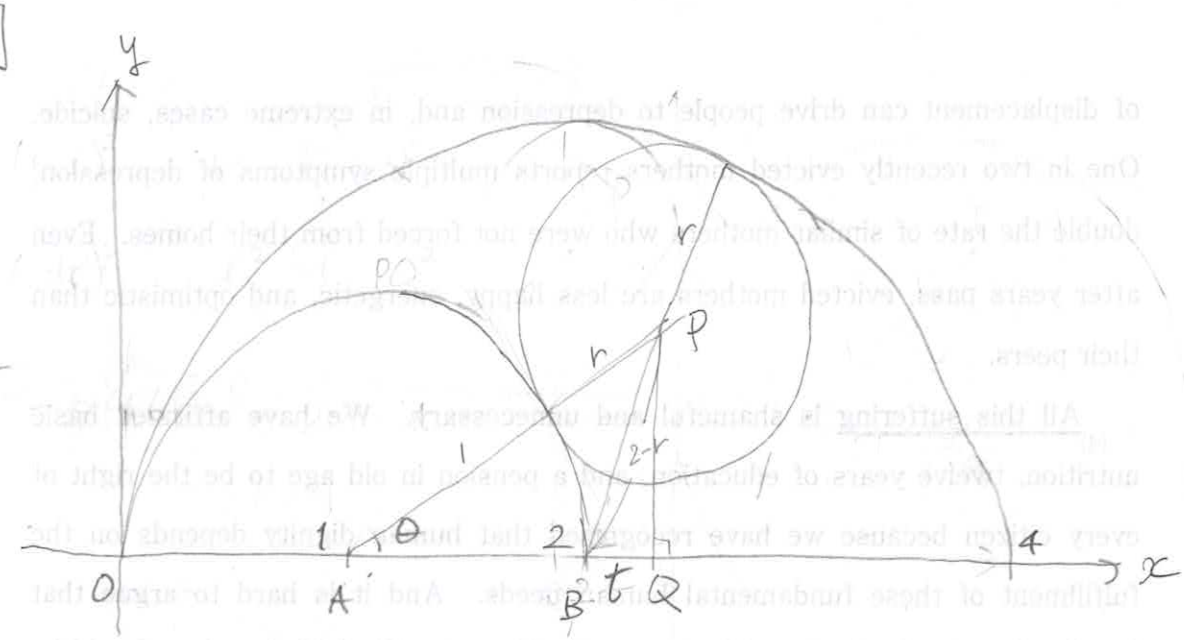
$g = x^3 - 3x + 2 - \left(-\frac{5}{3}x + \frac{70}{27}\right)$ とおくと、

$$g = x^3 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{27} \qquad g = 0\text{のとき } x = -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$$

$$\therefore \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} g\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{27}x\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3}$$

$\boxed{4}$



Pが$2 \leqq x$の領域にある場合を考えればよい。

点A, Bを図のようにとり　$BQ = x$とすると

$$(1+r)^2 = (1+t)^2 + PQ^2$$
$$(2-r)^2 = t^2 + PQ^2$$

$$6r - 3 = 2t + 1$$

$$t = 3r - 2 \qquad PQ = 2\sqrt{-2r^2+2r} \quad \left(\frac{2}{3} \leqq r \leqq 1\right)$$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}(3r-2+2) \cdot 2\sqrt{-2r^2+2r}$$
$$= 3\sqrt{2}\, r\sqrt{r-r^2} = 3\sqrt{2}\sqrt{r^3-r^4}$$

$f(r) = r^3 - r^4$とおくと

$f'(r) = 3r^2 - 4r^3 = r^2(3-4r)$

r	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		1
f		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	

∴ △OPQの最大値は

$$3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{6}}{16}$$

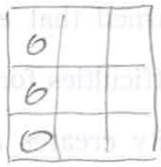
$\boxed{5}$

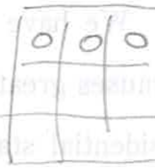
9個のマスから3つを選ぶ組合せなので、場合の数は

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$_9C_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84\text{(通り)}$$

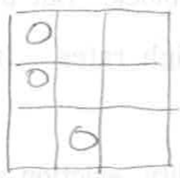
(1) $S=3$となるのは、タテ1列に並ぶか、ヨコ1列に並ぶかでそれぞれ3通り

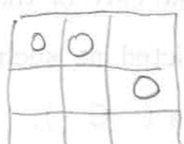




$$\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

(2) $S=2$となるのは、タテまたはヨコに2個の列1つと1個の列1つができる。

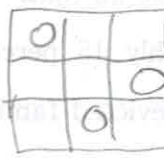




$$3\times 3\times 2\times 2 = 36$$

$$\frac{36}{84} = \frac{3}{7}$$

(3) $S=0$となるのは、タテヨコいずれも1個の列のみできる。



$$9\times 4\times 1 = 36$$

(1個目) (2個目)

$$\frac{36}{84} = \frac{3}{7}$$

したがって $S=1$となる確率は

$$1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$