

平成30年度前期日程試験問題

数 学 (Z)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4ページあります。
3. 問題は ～ の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用に使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所^とに記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の ～ で始まる面に、それぞれの問題の論証過程や計算過程がわかるように解答しなさい。

1 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とする。△OAB において、

辺 OA を $\frac{x}{2} : \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ に内分する点を C、

辺 OB を $(1-x) : x$ に内分する点を D、

線分 AD と線分 BC の交点を P

とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

〔1〕 \vec{OP} を x と \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

〔2〕 辺 AB の中点を M とする。点 P が線分 OM 上にあるときの x の値を a とする。 a を求めよ。また、そのときの OP : PM を求めよ。

〔3〕 $OA = 6OB$ 、 $\angle AOP = \angle BOP$ であるときの x の値を β とする。 β を求めよ。

〔4〕 $OA = 2$ 、 $OB = 1$ 、 $\cos \angle AOB = -\frac{1}{4}$ であり、 \vec{OP} と \vec{AB} が垂直であるときの x の値を γ とする。 γ を求めよ。

2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、次の条件によって定まる関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) がある。

$$f_1(x) = a_1x,$$

$$f_{n+1}(x) = a_{n+1}x + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

[1] 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2] 次の式で表される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_n = 2^n \int_0^1 f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

[3] $f_n(x) = 0$ を満たす x を n の式で表せ。

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

で定める。次の問いに答えよ。

[1] $f(x)$ の最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

[2] xy 平面の曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1) C 上の点 $(p, f(p))$ における接線の方程式を求めよ。

(2) q を実数とする。 C の接線のうち点 $(0, q)$ を通るものの本数を求めよ。

[3] 次の等式が成り立つように、定数 a の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - ax\} = 0$$

4

次の問いに答えよ。

〔1〕 (1) 不定積分 $\int \sin x \sin 2x dx$ を求めよ。(2) n が自然数のとき, 不定積分 $\int x \sin nx dx$ を求めよ。〔2〕 a, b を実数とする。定積分 $\int_0^\pi (x + a \sin x + b \sin 2x)^2 dx$ の最小値を求めよ。また, そのときの a, b の値を求めよ。

